GROUPE

- Nevisse Mnt Lemrabett
- Lemeyguef Mnt Mohamed
- Zeinebou Mnt Med Abd Rahman

Généralites sur les fonctions

EXERCICES

Exercice 1

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\dfrac{x+x^2+...+x^{2015}-2015}{x-1}$,

Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^k-1}{x-1}$, $(k\in\mathbb{N}^*)$ en déduire $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ telle que: $f(a)<ab$ et $f(b)>b^2$.
Démontrer qu'il existe un réel c de $[a,b]$ tel que $f(c)=bc$.
(On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x\mapsto f(x)-bx$).On

Exercice 7

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x+a$, $g(x)=-x^2$
Déterminer le réel a pour que les courbes représentatives de f et de g, dans le même repère orthonormé, aient une tangente commune en un point.

GROUPE

* Lemeyguef Mint Mouhamed *
* Nevisse Mint Lemrabott *
* Zeinebou Mint Med Abd rahman *

Chapitre généralités sur les fonctions :

Exo 1 → $\boxed{P = 18}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^K - 1}{x - 1} = \frac{1^K - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I}$$

* on pose $g(x) = x^K \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 \rightarrow g'(1) = K \\ g'(x) = K . x^{K-1} \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^K - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = K$$

2ᵉ Methode

on a : $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 1 \times \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

$\Rightarrow 1 + x + \cdots + x^{K-1} = \frac{x^K - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^K - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (1 + x + x^2 + \cdots x^{K-1})$$

$$= 1 + 1 + \cdots 1 = K$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim \frac{x + x^2 + \cdots x^{2015} - 2015}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1) + (x^2 - 1) + \cdots + x^{2015} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^1 - 1}{x - 1} + \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \cdots \frac{x^{2015} - 1}{x - 1} \right)$$

$$= 1 + 2 + \cdots + 2015$$

Somme de terme de S.A = $\frac{\text{Nombre de Terme}}{2}$ (1^{er} terme + $D^{ère}$ terme)

alors :

$$\rightarrow \frac{2015}{2} (1 + 2015) = \boxed{2015 \times 1008}$$

Groupe : * Lemeyguef Mnt Mohamed *

* Nevisse Mnt Lemrabott *

* Zeinebou Mnt Med Abd rahman *

Chapitre : généralités sur les fonctions :

exo 4 : → $\boxed{\text{Page } 20}$

* Soit $h(x) = f(x) - bx$

$h(a) = f(a) - ba < ab - ab < 0$

$h(b) = f(b) - bb > b^2 - b^2 > 0$

$\Rightarrow h(a) \times h(b) < 0$

$\Rightarrow 0 \in h(I)$

D'aprés le T.v.I :

$\exists\ c \in [a, b] : h(c) = 0$

$f(c) - bc = 0$

$$\boxed{f(c) = b.c}$$

GROUPE

* Lemeyguef Mint Mohamed *
* Nevisse Mint Lemnabott *
* zeïnebou Mint Med Abd rahman *

CHAPITRE généralités sur les fonctions

Exo 7 → $\boxed{P = 22}$

$f(x) = x^2 - 2x + a$ et $g(x) = -x^2$

En un pt d'abscisse x_0 une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est :

$$y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

et l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ est : $y = g'(x)(x - x_0) + g(x_0)$

on doit donc avoir $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$

Calculons : $f'(x)$ et $g'(x)$? → $g'(x) = -2x$ et $f'(x) = 2x - 2$

D'ou on doit avoir $\begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + a = -x_0^2 & (1) \\ 2x_0 - 2 = -2x_0 & (2) \end{cases}$

De (2) on a : $4x_0 = 2$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

et on remplaçant dans (1) on obtient :

$$\frac{1}{4} - 1 + a = -\frac{1}{4}$$

$$a = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

3

Primitives et L'intégrales

Exercice 2

Soit la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a ;b ;c tels que : $\forall x\in D_f, f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

2) En déduire une primitive de f.

Exercice 4

Soit la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ $x+\sqrt{x^2+1}$

On pose : $I=\int_0^1\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $J=\int_0^1\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Calculer f'(x); en déduire I et J.

Exercice 6

Pour tout entier naturel n on pose: $U_n=\int_0^1\dfrac{t^n dt}{1+t^2}$.

1) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n).

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que: $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0$.

Exercice 8

On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x dx$;

1) Calculer I+J

2) En utilisant une intégration par parties, calculer I-J ,

3) En déduire I et J.

Exercice 10

En utilisant le changement de variable, calculer les intégrales suivantes:

$I_1=\int_1^2\dfrac{dx}{(4x+5)^5}$; $t=4x+5$ $\qquad I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{1+x^2}$; $x=\tan t$

$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{4dx}{1+\cos x}$; $t=\tan\dfrac{x}{2}$ $\qquad I_4=\int_2^3\dfrac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; $t=x-1$

$I_5=\int_0^2\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}dx$; $t=\sqrt{1+x}$ puis $t=\tan u$.

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Soient a et b des réels dans I.

Prouver que: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

2) On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^3 xdx}{\cos^3 x+\sin^3 x}$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3 xdx}{\cos^3 x+\sin^3 x}$.

Montrer que I=J. Calculer I+J. En déduire I et J.

3) Calculer $K=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x})dx$.

Exercice 14

Pour tout entier naturel $n\geq 2$ et pour $k\leq n$ on pose: $I_{k;n}=\int_0^1 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}dx$

1) Montrer que l'intégrale $I_{k;n}$ existe pour tout n.

2) En utilisant une intégration par parties trouver une relation entre $I_{k;n}$ et $I_{k+1;n}$. En déduire $I_{k;n}$ en fonction de k et n.

groupe : *Nevisse Mnt Lemrabott*
Lemeyguef Mnt Mohamed

L'integrale et Primitive :

exercice 2 : P. 50

1)* $ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$ $\forall x \in Df$

$$\frac{(x+1)^2(ax+b)+c}{(x+1)^2} = f(x) \,,\ \forall x \in Df$$

$$\frac{ax^3 + bx^2 + 2ax^2 + 2bx + ax + b + c}{(x+1)^2}$$

$$\frac{ax^3 + (b+2a)x^2 + (2b+a)x + b + c}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 3 \\ 2b + a = 3 \\ b + c = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - 2 \times 1 = 1 \\ 2 \times 1 + 1 = 3 \\ c = -3 - 1 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in Df \ \boxed{f(x) = x + 1 - \frac{4}{(x+1)^2}}$$

2)* $\forall x \in Df$ $f(x) = x + 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$

Donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{4}{(x+1)} + K}$.

est Une Primitive de f Sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

groupe : Nevissa Mnt Lemrabott
"Lemeyguef Mnt Mohamed."

exercice 4 : $\boxed{P : 52}$ « L'intégrale » et « Primitive »

1) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ Soit $f'(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ Peut être sous la forme :

$$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

D'où $I = \left[\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2\right]_0^1$

$$I = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(1)^2$$

"Enfin" $I = \underline{2+2\sqrt{2}}$

L'integrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}\,dx$ Peut être sous la forme :

$J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}\,dx$ d'où $J = \left[\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$$

"Enfin" $J = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

5

GROUPE

* Lemeyguef Mint Mouhamed *
* Nevisse Mint Lemrabott *
* Zeinebou Mint Med Abd rahman *

« Intégrales » et « Primitives »

Exo 6 P= 54

1) $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

Comme la fonction $t \to \frac{t^n}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,1]$ d'ou l'intervalle U_n existe et l'écriture $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ definit bien une suite numérique.

2) $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ et $U_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt$

on a : $0 \leq t \leq 1$

et un multipliant par $\frac{t^n}{1+t^2}$ qui est ≥ 0 sur $[0,1]$ on obtient :

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$$

D'où $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

D'où : (U_n) est ↘ et positive, et comme elle est ↘ et minoreé (par 0) elle est donc convergente.

3) $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

$0 \leq t \leq 1 \rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$

$0 \leq 1 \leq 1+t^2 \leq 2 \rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

et en multipliant Par t^n qui est ≥ 0 sur $[0,1]$ on obtient :

$$\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$$

Donc : $\frac{1}{2}\int_0^1 t^n\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt$

D'ou : $\frac{1}{2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

D'ou : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - 0\right) \leq U_n \leq \left(\frac{1}{n+1} - 0\right)$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$0 \leq U_n \leq 0$

D'ou d'aprés le Th de gendarme

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$$

6

GROUPE

* Lemeyguef Mint Mohamed *
* Nevisse Mint Lemrabott *
* Zeïnebou Mint Med Abd rahman *

" Intégrales " et " primitives "

Exo 8 P. 55

1) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x + x\cos^2 x)\,dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$

$I + J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I + J = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right)$

$$\boxed{I + J = \frac{\pi^2}{8}}$$

2) on a $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x - x\cos^2 x)\,dx$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x\cos 2x)\,dx$

on utilise une intégration par parties :

on pose : $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$I - J = \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

$I - J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\,dx$

$I - J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I - J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$$\boxed{I - J = \frac{1}{2}}$$

on résout le système :

$\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi^2 + 8}{16}}$

Par Soustraction : $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi^2 - 8}{16}}$

7

groupe : *Nevisse Mnt Lemrabott*
Lemeyguef Mnt Mohamed
Zeinebou Mnt Abd Rahman

"L'integrale" et "Primitive" :

Exercice 10 : P. 58

* $I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$; $t = 4x+5$

$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \boxed{t = 9} \\ x = 2 \Rightarrow \boxed{t = 13} \end{cases}$

$dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

$I_1 = \int_9^{13} \frac{1}{4} \times \frac{1}{t^5}\, dt$

$I_1 = \frac{1}{4}\int_9^{13} t^{-5}\, dt = \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{4} t^{-4}\right]_9^{13}$

$\boxed{I_1 = -\frac{1}{16}\left(13^{-4} - 9^{-4}\right)}$

* $I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; $x = \tan t$

$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{4}} \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan t = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{3}} \end{cases}$

$dx = (1 + \tan^2) dt$

$dx = (1+x^2)\, dt$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{1+x^2}}\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$

$I_2 = [t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{12}}$

* $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$; $t = \tan\frac{x}{2}$

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \tan 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$

$dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) dx$

$dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\, dx$

On sait que : $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ Alors :

$I_3 = \int_0^1 \frac{4 \times \cancel{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\cancel{2\cos^2\frac{x}{2}}}\, dt$

$I_3 = \int_0^1 4\, dt = [4t]_0^1 = 4$

$\Rightarrow \boxed{I_3 = 4}$

* $I_4 = \int_2^3 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x-1}}$; $t = x - 1$

$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow \boxed{t = 1} \\ x = 3 \Rightarrow \boxed{t = 2} \end{cases}$

$dt = dx \quad t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}\, dt$

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t^3 + 3t^2 + 3t + 1)}{t^{\frac{1}{2}}}\, dt$

$I_4 = \int_1^2 \left(t^{5/2} + 3t^{3/2} + 3^{1/2} + t^{-1/2}\right) dt$

8

GROUPE

* Lemeyguef Mint Mouhamed *
* Nevisse Mint Lemrabott *
* Zeinebou Mint Med Abd rrahman *

« L'intégrale » et « primitives »

Exo 10 — Page 58

Suite d'exercice

$$I_4 = \left[\frac{1}{\frac{5}{2}+1} t^{\frac{5}{2}+1} + \frac{3}{\frac{3}{2}+1} t^{\frac{3}{2}+1} + 3 \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} t^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^2$$

$$I_4 = \left[\frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5} t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$$

$$I_4 = \left[\sqrt{t}\left(\frac{2}{7}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 2t + 2\right)\right]_1^2$$

$$\boxed{I_4 = \sqrt{2}\left(\frac{16}{7} + \frac{24}{5} + 6\right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{6}{5} + 4\right)}$$

* $I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}\, dx$

1ère étape : $t = \sqrt{x+1}$

$$\begin{cases} x = 0 \to t = 1 \\ x = 2 \to t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, dx \to dt = \frac{1}{2t}\, dx \to \boxed{dx = 2t\, dt}$$

on sait que : $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = t^2(t^2+1)$

Alors $I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t\, 2t\, dt}{t^2(t^2+1)} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}$

2ème étape $t = \tan u$

$$t = 1 \to \tan u = 1 \to u = \frac{\pi}{4}$$
$$t = \sqrt{3} \to \tan u = \sqrt{3} \to u = \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{dt = (1 + \tan^2 u)\, du}$$

$$I_5 = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 u}{1+\tan^2 u}\, du \Rightarrow I_5 = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} du = \left[2u\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I_5 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow I_5 = 2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{I_5 = \frac{\pi}{6}}$$

9

GROUPE

* Lemeyguef Mint Mouhamed *
* Nevisse Mint Lemrabott *
* Zeïneboa Mint Med Abd rahman *

" intégrales " et " primitives "

Exo 12 $\boxed{P = 60}$

1) on pose $t = a + b - x$

$$\begin{cases} x = a \rightarrow t = b \\ x = b \rightarrow t = a \end{cases}$$

$$dt = -dx \rightarrow dx = -dt$$

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(t)(-dt)$$

$$= -\int_b^a f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx}$$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$

on pose $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car quotient de deux fonctions continues.

on prend : $\boxed{a = 0}$ $\boxed{b = \frac{\pi}{2}}$

donc $a + b - x = \frac{\pi}{2} - x$

$$f(a+b-x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$$

D'après ① : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$$

$$\boxed{I = J}$$

on a $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I + J = \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} I = J \\ I + J = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{I = J = \frac{\pi}{4}}$$

3) on pose $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}$

$\boxed{a = \frac{\pi}{6}}$ $\boxed{b = \frac{\pi}{3}}$

f est continue sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

on a : $f(a+b-x) = f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right)$

$$= f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} - \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}$$

$$= -f(x)$$

D'après ① : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

$$K = -K \leftrightarrow \boxed{K = 0}$$

10

groupe :
* Nevisse Mnt Lemrabott *
* Lemeyguef Mnt Mohamed. *
* Zeinebou Mnt Med abd rahman *

« L'integrale et Primitive » :

Exercice 14 : Page 62

$$I_{K,n} = \int_0^1 C_n^K x^K (1-x)^{n-K} dx$$

1) La fonction $(x \to C_n^K x^K (1-x)^{n-K})$ est Continue Sur $[0,1]$ Pour K et $n \in \mathbb{N}$ telsque $0 \leq K \leq n$, $n \geq 2$ car est Un Polynôme (en developpant) Alors L'integrale $I_{K,n}$ existe Pour tout n et K.

2) * En utilisant Une I.p.p.

On Pose : $\begin{cases} u'(x) = C_n^K x^K \\ v(x) = (1-x)^{n-K} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u(x) = \dfrac{C_n^K}{K+1} x^{K+1} \\ v'(x) = -(n-K)(1-x)^{n-K-1} \end{cases}$

$\int u'v = [uv] - \int uv'$

$$I_{K,n} = \left[\frac{C_n^K}{K+1} x^{K+1} (1-x)^{n-K}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(n-K)C_n^K}{K+1} \cdots x^{K+1}(1-x)^{n-K-1} dx$$

$$\boxed{I_{K,n} = 0 + \int_0^1 \frac{n-K}{K+1} C_n^K \cdot x^{K+1} (1-x)^{n-K-1} dx}$$

On a : $C_n^{K+1} = \dfrac{n!}{(K+1)!(n-K-1)!} = \dfrac{n! \times (n-K)}{(K+1)K!(n-K)(n-K-1)!}$

$C_n^{K+1} = \dfrac{n-K}{K+1} \cdot \dfrac{n!}{K!(n-K)!}$

$C_n^{K+1} = \dfrac{n-K}{K+1} C_n^K$

Alors en Remplaçant :

$$I_{K,n} = \int_0^1 C_n^{K+1} x^{K+1} (1-x)^{n-(K+1)} dx$$

$$\boxed{I_{K,n} = I_{K+1,n}}$$

On en déduit que La Suite $(I_{K,n})$ est Constante Par Rapport à K.

ç-a-d : $I_{K,n} = I_{0,n} = I_{n,n}$ (independant de K).

$I_{n,n} = \int_0^1 C_n^n x^n (1-x)^0 dx$

$I_{n,n} = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{1}{n+1}}$

Pour tout $K \leq n$. « Autre Méthode »

Comme $I_{K,n}$ est Constante Par Rapport à K, On a Alors :

$$\sum_{K=0}^{n} I_{K,n} = (n+1) I_{K,n}$$

11

$$\sum_{K=0}^{n} I_{K,n} = \int_0^1 \sum_{K=0}^{n} C_n^K \, x^K (1-x)^{n-K} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + (1-x)\right)^n dx = \int_0^1 dx = \left[x\right]_0^1$$

$$\sum_{K=0}^{n} I_{K,n} = 1 \Rightarrow (n+1)\, I_{K,n} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{K,n} = \frac{1}{n+1}}$$